# Cálculo. Tema 1

## ETSII- GITI

## Ejercicio Propuesto nº 3

Academia M$^{21}$

Puedes ver el ejercicio resuelto en nuestro canal de YouTube
o entrando en nuestra página web: Academia-M21

## Ejercicio 3

Sean $k$ y $n$ números enteros con $n \geq 1$ y $0 \leq k \leq n$

1. Probar que se verifica que
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$
2. Demostrar que, si $1 \leq k \leq n$, se verifica que:
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$
y deducir que los números combinatorios son en realidad números naturales.
3. Demostrar la fórmula del binomio de Newton:
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

**Solución 1.** :

1. Por la propia definición de número combinatorio tenemos que
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)}! \qquad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$
con lo que se comprueba que son iguales.
2. Tenemos que por la igualdad del apartado anterior se cumple que
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n}{n-k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} =$$
$$= \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} =$$
$$= \binom{n+1}{k}$$
Para demostrar que los números combinatorios son en realidad números naturales, vamos a demostrarlo por inducción

- Comprobamos que se cumple para $n = 1$

$$1 \leq k \leq 1 \Rightarrow k = 1$$
$$\binom{1}{k} = \binom{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$$

- Suponemos que se cumple para $n$ y comprobamos que se cumple para $n+1$. Es decir, suponemos cierto esta expresión:

$$1 \leq k \leq n$$

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

y tenemos que demostrar que

$$1 \leq k \leq n+1$$
$$\binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}$$

Comenzamos a probarlo

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Por la hipótesis de inducción sabemos que el primer y segundo sumando de la parte de la derecha es un número natural, y como la suma de números naturales es un número natural, concluimos que $\binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}$

3. Demostramos la fórmula por inducción

- Para $n = 1$ es evidente que se cumple

$$x + y = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y$$

- Probamos que si se cumple para $n$ también se cumple para $n+1$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y) = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} =$$
$$= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + \binom{n}{n} y^{n+1}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable en la suma marcada en azul $k = j - 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^{n-j+1} y^{j}$$

si volvemos a llamar $k$ al índice $j$ y lo sustituimos en la ecuación anterior

$$\binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^{k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^{k} + \binom{n}{n} y^{n+1}$$

y ahora utilizamos la fórmula del apartado anterior, en los dos sumatorios

$$\binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n-k+1} y^{k} + \binom{n}{n} y^{n+1} =$$
$$= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^{k} + \binom{n}{n} y^{n+1} =$$
$$= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^{k} + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^{k}$$