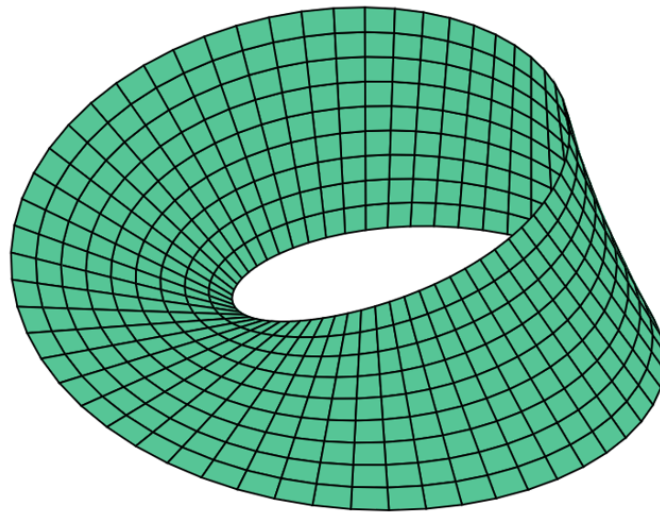


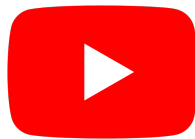
# Cálculo. Tema 1

ETSII- GITI

EJERCICIO PROPUESTO N<sup>o</sup> 3



**Academia M<sup>21</sup>**



Puedes ver el ejercicio resuelto en nuestro canal de YouTube  
o entrando en nuestra página web: Academia-M21

## Ejercicio 3

Sean  $k$  y  $n$  números enteros con  $n \geq 1$  y  $0 \leq k \leq n$

1. Probar que se verifica que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2. Demostrar que, si  $1 \leq k \leq n$ , se verifica que:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

y deducir que los números combinatorios son en realidad números naturales.

3. Demostrar la fórmula del binomio de Newton:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

## Solución 1. :

1. Por la propia definición de número combinatorio tenemos que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

con lo que se comprueba que son iguales.

2. Tenemos que por la igualdad del apartado anterior se cumple que

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \binom{n}{n-k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \\ &= \binom{n+1}{k} \end{aligned}$$

Para demostrar que los números combinatorios son en realidad números naturales, vamos a demostrarlo por inducción

- Comprobamos que se cumple para  $n = 1$

$$1 \leq k \leq 1 \Rightarrow k = 1$$

$$\binom{1}{k} = \binom{1}{1} = 1 \in \mathbb{N}$$

- Suponemos que se cumple para  $n$  y comprobamos que se cumple para  $n + 1$ . Es decir, suponemos cierto esta expresión:

$$1 \leq k \leq n$$

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

y tenemos que demostrar que

$$1 \leq k \leq n + 1$$

$$\binom{n + 1}{k} \in \mathbb{N}$$

Comenzamos a probarlo

$$\binom{n + 1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k - 1}$$

Por la hipótesis de inducción sabemos que el primer y segundo sumando de la parte de la derecha es un número natural, y como la suma de números naturales es un número natural, concluimos que  $\binom{n+1}{k} \in \mathbb{N}$

### 3. Demostramos la fórmula por inducción

- Para  $n = 1$  es evidente que se cumple

$$x + y = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y$$

- Probamos que si se cumple para  $n$  también se cumple para  $n + 1$

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)^n (x + y) = (x + y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} = \\ &= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + \binom{n}{n} y^{n+1} \end{aligned}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable en la suma marcada en azul  $k = j - 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j-1} x^{n-j+1} y^j$$

si volvemos a llamar  $k$  al índice  $j$  y lo sustituimos en la ecuación anterior

$$\binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^{n-k+1} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}$$

y ahora utilizamos la fórmula del apartado anterior, en los dos sumatorios

$$\begin{aligned} & \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^{n-k+1} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1} = \\ & = \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1} = \\ & = \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} = \\ & = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \end{aligned}$$